CHAPITRE 2

FONCTIONS REELLES A VARIABLE REELLE

1 Les définitions

***Exercice** 1*

Qu'est-ce qu'une relation d'un ensemble vers un autre? Qu'est-ce que le graphe d'une relation? Doit-on prendre tous les éléments de l'ensemble de départ dans la construction du graphe?
Pour les relations de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ données par les conditions suivantes, tous les éléments de l'ensemble de départ ont-ils une image? N'en ont-ils qu'une?

1) $f(x) = 2x+1$ 2) $f(x) = x^2$ 3) $f(x) = \frac{1}{x}$

4) $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$ 5) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = |y|$ 6) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y^2$

Définitions 1 Une relation pour laquelle tout élément de l'ensemble de départ a au plus une image s'appelle **fonction**.
Une relation pour laquelle tout élément de l'ensemble de départ a exactement une image s'appelle **application**.

Notations

1 Une application f de A vers B qui à tout x associe son **image** y se note

$$f : A \to B$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

L'élément x est appelé **ancêtre** de y. A est l'ensemble de départ et B l'ensemble d'arrivée.

Pour l'application f on a $f = (A, B, G)$ et $\big((x, y) \in G \Leftrightarrow x \in A \text{ et } y \in B \text{ et } y = f(x)\big)$.

2 Pour une application f telle que

$$f : A \to A$$
$$x \mapsto x = f(x)$$

on écrit $f = Id_A$ ou $f = Id$ s'il n'a y pas de confusion sur l'ensemble de départ.

L'application f est alors dite **identité**.

Exercice 2

Parmi les relations suivantes, lesquelles sont des fonctions, des applications?

a) $(\mathbf{P}\mathrm{x}\mathbf{P}, \mathbf{R}_+, G)$ et $\big((x, y) \in G \Leftrightarrow x = (A, B) \text{ et } y = \delta(A,B)\big)$

Quel est le nom de cette relation?

b) $(\mathbf{P}, d, G)$ et $\big((A, A') \in G \Leftrightarrow A' = p_{\perp}(A) \in d\big)$

c) $(\mathbf{N}\mathrm{x}\mathbf{N}, \mathbf{N}, G)$ et $\big((x,y) \in G \Leftrightarrow x = (a, b) \text{ et } y = a + b\big)$

d) $(\mathbf{N}\mathrm{x}\mathbf{N}, \mathbf{N}, G)$ et $\big((x,y) \in G \Leftrightarrow x = (a, b) \text{ et } y = a - b\big)$

e) $(\mathbf{P}, \mathbf{P}, G)$ et $\big((A, A') \in G \Leftrightarrow \mathcal{S}_d(A) = A'\big)$

f) $(\mathbf{R}, \mathbf{R}, G)$ et $\big((x, y) \in G \Leftrightarrow y = -3x\big)$

g) $(\mathbf{R}, \mathbf{R}, G)$ et $\big((x, y) \in G \Leftrightarrow y = \frac{1}{x-1}\big)$

h) $(\mathbf{R}, \mathbf{R}, G)$ et $\big((x, y) \in G \Leftrightarrow y = x\big)$

i) $(\mathbf{R}, \mathbf{R}, G)$ et $\big((x, y) \in G \Leftrightarrow x \leq y\big)$

Définitions 2 On appelle **fonction réelle à variable réelle** toute fonction dont les ensembles de départ et d'arrivée sont $\mathbf{R}$.

Le **domaine de définition** d'une fonction réelle à variable réelle f est l'ensemble des éléments de $\mathbf{R}$ qui ont une image par f. Cet ensemble est noté Df.

Exercice 3

Pour chacune des fonctions réelles à variable réelle f *suivantes données par une image* f(x), *trouver* Df, *le domaine de définition.*

1) $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ 2) $f(x) = \sqrt{2}$ 3) $f(x) = \frac{1}{x}$

4) $f(x) = x^2$ 5) $f(x) = \frac{2}{x+1}$ 6) $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 1}$

Définition 3 Une application pour laquelle chaque élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un ancêtre est appelée **injection** ou **application injective**.

Définition 4 Une application pour laquelle tous les éléments de l'ensemble d'arrivée ont au moins un ancêtre est appelée **surjection** ou **application surjective**.

Définition 5 Une application f est **bijective** si et seulement si elle est injective et surjective. On dit aussi f est une **bijection**.

Exercice 4

Démontrer que, par une application injective, deux éléments distincts ont deux images distinctes. Parmi les applications de l'exercice 3, lesquelles sont injectives, surjectives ou bijectives.

Définition 6 On appelle **valeur absolue** l'application de **R** vers **R** telle que

$$|\dots| : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{et } x \geq 0 \\ & \text{ou} \\ -x & \text{et } x < 0 \end{cases}$$

Remarque

La valeur absolue est une application. La valeur absolue d'un nombre est un nombre.

Exercices

5 *L'application valeur absolue est-elle bijective? Proposer des restrictions sur l'ensemble de départ ou d'arrivée pour que l'on ait une injection, une surjection.*

6 *Comment choisir les ensembles de départ et d'arrivée pour que les fonctions réelles d'une variable réelle suivantes soient bijectives?*

1) $f(x) = 3x - 1$ 2) $f(x) = 3$ 3) $f(x) = |x| + 1$

4) $f(x) = -|x|$ 5) $f(x) = |x-1|$ 6) $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$

THEOREME 1 Si $f : A \to B$
$x \mapsto y = f(x)$ et f est bijective,

alors il existe une **application réciproque bijective** de B vers A, notée f^{-1}, qui à tout y de B associe un et un seul x de A avec

$$f^{-1} : B \to A$$
$$y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

COROLLAIRE Si la relation réciproque d'une application est une application, alors l'application est bijective.

Exercices

7 *Pour une bijection* f, *traduire* (f^{-1} application réciproque de f) $\Leftrightarrow \big((x, y) \in G_f \Rightarrow (y, x) \in G_{f^{-1}} \big)$

8 *Qu'est-ce que* f^{-1} ? *(dans le cas où* f^{-1} *existe)*

1) $f = \mathcal{S}_d$ 2) $f = \mathcal{S}_O$ 3) $f(x) = 2x$

4) $f(x) = \sqrt{2}\,x - 3$ 5) $f(x) = \dfrac{1}{3}x + 4$ 6) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

7) $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto |x|$

8) $f : [-1, +\infty[\to [2; +\infty[$, $x \mapsto |x+1| + 2$

9 *Comment choisir les ensembles de départ et d'arrivée pour que* f *soit bijective? Calculer* f^{-1}.

1) $f(x) = \dfrac{2}{|x-3|}$ 2) $f(x) = \dfrac{-1}{|x+3|}$ 3) $f(x) = x + |x|$

4) $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$ 5) $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$ 6) $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$

7) $f(x) = ax + b$ 8) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$ 9) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

2 Représentation graphique d'une fonction réelle à variable réelle

Exercice 10

Quels sont les ensembles suivants?

$A_1 = \{M(x, y) \in \mathbf{P} \mid y = x\}$ $\quad$ $A_2 = \{M(x, y) \in \mathbf{P} \mid y = x+1\}$

$A_3 = \{M(x, y) \in \mathbf{P} \mid y = -2\}$ $\quad$ $A_4 = \{M(x, y) \in \mathbf{P} \mid 4x+2y-8 = 0\}$

$A_5 = \{M(x, y) \in \mathbf{P} \mid y = 3x+b\}$ $\quad$ $A_6 = \{M(x, y) \in \mathbf{P} \mid y = ax \text{ et } a \neq 0\}$

THEOREME 2 L'ensemble $E = \{M(x, y) \in \mathbf{P} \mid y = ax+b\}$ est une droite du plan.

Indication pour la démonstration.

1 On prend $A(0, b) \in E$ et $B(1, a+b) \in E$ et on montre qu'un point quelconque $M(x, ax+b) \in E$ est aligné avec A et B, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}$. On conclut que $E \subset (AB)$.

2 On prend $M(x, y) \in (AB)$ avec $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}$, on obtient $\begin{pmatrix} x \\ y-b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = ax+b$. On conclut que $M \in E$ et $(AB) \subset E$.

Définition 7 On appelle **graphique** ou **représentation graphique** d'une fonction réelle à variable réelle f le sous-ensemble du plan $\Gamma_f = \{M(x, y) \in \mathbf{P} \mid y = f(x)\}$.

Exercice 11

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, *représenter graphiquement* f *dans les cas suivants et donner l'intersection des graphiques avec les axes du système de coordonnées; étudier* f^{-1} *dans les cas possibles.*

1) $f(x) = x$	2) $f(x) = -x$	3) $f(x) = 2x$
4) $f(x) = -3x$	5) $f(x) = x+1$	6) $f(x) = x-2$
7) $f(x) = 2x+2$	8) $f(x) = 2x+4$	9) $f(x) = 4x-5$
10) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$	11) $f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$	12) $f(x) = 5x - 1$

13) $f(x) = 3x + |3x| + 1$ 14) $f(x) = -4x + |4x| - 1$

15) $f(x) = |x| + |x-1| - 2x$ 16) $f(x) = 3|x+2| - 4|x-3| + x$

Définition 8 On appelle **application affine** une application f telle que

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = ax + b$$

Si $b = 0$, f est aussi appelée **application linéaire.**

Exercices

12 *Donner, si possible, une application affine dont le graphique est une droite passant par* A *et* B, *puis calculer l'intersection de ces droites avec les axes du système de coordonnées dans les cas suivants.*

1) $A(1, 1)$ et $B(3, 2)$ 2) $A(-2, 4)$ et $B(\frac{1}{2}, 1)$ 3) $A(4, 4)$ et $B(4, 5)$

4) $A(3, 1)$ et $B(-2, 1)$ 5) $A(3, 3)$ et $B(-3, -3)$ 6) $A(-1, -3)$ et $B(2, 6)$

13 *Donner la position relative des droites* d_1 *et* d_2 *représentant les applications affines* f_1 *et* f_2 *dans les cas suivants. (Sont-elles sécantes, parallèles?)*

1) $f_1(x) = 2x + 1$ et $f_2(x) = 4x + 4$ 2) $f_1(x) = 5x$ et $f_2(x) = 5x + 1$

3) $f_1(x) = 3x$ et $f_2(x) = \frac{1}{3}x + 2$ 4) $f_1(x) = \frac{1}{2}x - 1$ et $f_2(x) = -\frac{1}{2}x - 1$

5) $f_1(x) = ax + b$ et $f_2(x) = \alpha x + \beta$ 6) $f_1(x) + 2 = x$ et $f_2(x) - 2x = 0$

14 *Représenter graphiquement* f *et* f^{-1} *si*

1) $f(x) = x + 3$ 2) $f(x) = -x + 5$ 3) $f(x) = 3x - 2$

4) $f(x) = \frac{1}{4}x + 3$ 5) $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}$ 6) $f(x) = \frac{3}{7}x - \frac{1}{4}$

3 Vocabulaire relatif aux fonctions réelles à variable réelle

Définition 9 Une fonction réelle à variable réelle f est dite **croissante** (respectivement **décroissante**) sur un intervalle I si et seulement si $\forall \{x_1, x_2\} \subset I \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ (resp. $f(x_1) \geq f(x_2)$).

<u>Exemples</u>

1 Si $f(x) = 4x$, alors f est croissante sur $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ car $x_1 < x_2 \Rightarrow 4x_1 < 4x_2 \Rightarrow 4x_1 \leq 4x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

2 Pour la fonction **constante**, si $f(x) = c$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$ car $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Elle est aussi décroissante car $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

3 Si $f(x) = |x|$, alors $0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow |x_1| \leq |x_2| \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ et f est croissante sur $[0, +\infty[$,
et $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow -x_1 > -x_2 > 0 \Rightarrow |x_1| \geq |x_2| \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ et f est décroissante sur $]-\infty, 0[$.

Exercice 15

Proposer une définition pour une fonction strictement croissante sur un intervalle, respectivement strictement décroissante. Quelles sont, dans l'exercice 10 les fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}$?

Définition 10 Une fonction est dite **monotone** sur un intervalle I si et seulement si elle est croissante, respectivement décroissante, sur cet intervalle.

Exercices

16 Etudier la monotonie de f si

1) $f(x) = \frac{1}{4}x + 1$	2) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$	3) $f(x) = 4$
4) $f(x) = -x$	5) $f(x) = ax$	6) $f(x) = ax + b$
7) $f(x) = \|x\|$	8) $f(x) = \|2x\|$	9) $f(x) = \|-3x\|$

10) $f(x) = |x| - |x+1|$ 11) $f(x) = 2|x-1| + |2x|$ 12) $f(x) = |x+2| - |3x|$

17 *Etant donnés deux éléments distincts* x_1 *et* x_2 *d'un intervalle* I, *sous-ensemble du domaine de définition* Df *d'une fonction* f, *on appelle* ***taux d'accroissement*** *de la fonction* f *entre* x_1 *et* x_2 *le nombre réel* $t = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Démontrer les trois équivalences suivantes.

1. (f est croissante sur I) $\Leftrightarrow$ ($\forall \{x_1, x_2\} \subset I \quad t \geq 0$)
2. (f est décroissante sur I) $\Leftrightarrow$ ($\forall \{x_1, x_2\} \subset I \quad t \leq 0$)
3. (f est constante sur I) $\Leftrightarrow$ ($\forall \{x_1, x_2\} \subset I \quad t = 0$)

Définition 11 On dit qu'une fonction réelle à variable réelle f est **paire** si et seulement si ($x \in Df \Rightarrow -x \in Df$) et $f(-x) = f(x)$.

Définition 12 On dit qu'une fonction réelle à variable réelle f est **impaire** si et seulement si ($x \in Df \Rightarrow -x \in Df$) et $f(-x) = -f(x)$.

Remarque

Etudier la parité d'une fonction, c'est déterminer si elle est paire ou impaire.

Exercices

18 *Les fonctions* f *suivantes sont-elles paires?*

1) $f(x) = |x| + x^2$ 2) $f(x) = |x| + \dfrac{1}{|x|}$ 3) $f(x) = 3$

4) $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|}$ 5) $f(x) = |x| + x$ 6) $f(x) = 21x$

7) $f(x) = -|x| + 2$ 8) $f(x) = x^2 - 4$ 9) $f(x) = -x^2$

19 *Les fonctions* f *suivantes sont-elles impaires?*

1) $f(x) = x$ 2) $f(x) = x^3$ 3) $f(x) = x^5$

4) $f(x) = x + x^3$ 5) $f(x) = x^4$ 6) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

7) $f(x) = ax$ 8) $f(x) = \sqrt{2}x - \sqrt{3}$ 9) $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$

20 *Si* $f(x) = ax + b$, *démontrer que l'on a* f *fonction paire si et seulement si* $a = 0$ *et* f *fonction impaire si et seulement si* $b = 0$.

21 *Si* Γ_f *est le graphique de la fonction* f, *démontrer que si* f *est paire, le graphique* Γ_f *admet l'axe* (OY) *comme axe de symétrie, et si* f *est impaire, il admet* O(0, 0) *comme centre de symétrie.*

Rechercher dans les exercices 16 *et* 17 *les graphiques admettant un axe ou un centre de symétrie.*

22 *a) Trouver* α *si* $A(1, 2) \in \Gamma_f$ *et* $f(x) = |x+3| + \alpha$

β *si* $B(-1, 3) \in \Gamma_f$ *et* $f(x) = \beta|x+2|$

b) Trouver α *et* β *si* $A(0, 2) \in \Gamma_f$ *et* $B(-1, -3) \in \Gamma_f$ *et* $f(x) = \alpha|x+3| + \beta$

c) Trouver α, β *et* γ *si* $A(0, 1) \in \Gamma_f$, $B(2, 2) \in \Gamma_f$ *et* $C(5, 0) \in \Gamma_f$ *et* $f(x) = \alpha|x-2| + \beta x + \gamma$

Etudier la monotonie de ces fonctions.

23 *Si* $f(x) = |x| + 1$, *représenter graphiquement* f. *Démontrer que l'on a* $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(0) \leq f(x)$.

Définition 13 On dit qu'une fonction réelle à variable réelle f admet un **minimum** en x_0 si et seulement si il existe un intervalle ouvert I tel que $\forall x \in I \quad f(x_0) \leq f(x)$.

$f(x_0)$ s'appelle le minimum de f sur I.

Exercice 24

Les fonctions suivantes admettent-elles un minimum sur $\mathbb{R}$ *et pour quel choix de* x *?*

1) $f(x) = |x+1| + 2$ 2) $f(x) = |x| - \frac{1}{3}$ 3) $f(x) = |2x+3| - 4$

4) $f(x) = -|x| + 1$ 5) $f(x) = -|2x| - 4$ 6) $f(x) = x + |x|$

Définition 14 On dit qu'une fonction réelle à variable réelle f admet un **maximum** en x_0 si et seulement si il existe un intervalle ouvert I tel que $\forall x \in I \quad f(x_0) \geq f(x)$.

$f(x_0)$ s'appelle le maximum de f sur I.

Exercices

25 *Une fonction constante admet-elle un maximum, un minimum?*

26 *Les applications suivantes admettent-elles un maximum ou un minimum sur* Df *ou sur un intervalle bien choisi?*

1) $f(x) = |x| + 2x + 1$ 2) $f(x) = 2x + 1$ 3) $f(x) = \sqrt{3}x - 3$

4) $f(x) = \frac{1}{|x|}$ 5) $f(x) = -x^2$ 6) $f(x) = -x^2 - 1$

7) $f(x) = -x^2 + 2$ 8) $f(x) = -|x| + 1$ 9) $f(x) = (x+2)^2$

10) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} -x-1 & \text{et } x < 2 \\ & \text{ou} \\ x+1 & \text{et } x \geq 2 \end{cases}$$

11) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} -2x+1 & \text{et } x \leq -1 \\ & \text{ou} \\ x+4 & \text{et } x > -1 \end{cases}$$

12) $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

13) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{et } x \leq 3 \\ & \text{ou} \\ -2x+10 & \text{et } x > 3 \end{cases}$$

Définition 15 Une fonction réelle à variable réelle admet un **extremum** sur un intervalle I si et seulement si elle y admet un maximum ou un minimum.

Exercice 27

Toute fonction admet-elle un extrémum?

Trouver dans les exercices 18 et 19 les fonctions qui admettent un extrémum sur certains intervalles.

4 Composition des applications

Définition 16 Avec $B \subset C$, si $f : A \to B$, $x \mapsto y = f(x)$ et $g : C \to D$, $y \mapsto z = g(y) = g(f(x))$

on appelle **application composée** l'application

$$h : A \to D$$
$$x \mapsto z = h(x) = g(f(x))$$

Notation: $g(f(x)) = gof(x) = h(x)$ et $h = g \circ f$ (on lit g "rond" f)

Exercices

28 *Trouver* x *si* $gof(x) = 0$.

1) $f(x) = 2x$ et $g(x) = 3x$

2) $f(x) = \frac{1}{3}x$ et $g(x) = 3x$

3) $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = 5x - 4$

4) $f(x) = ax$ et $g(x) = b$

5) $f(x) = x + 2$ et $g(x) = |x|$

6) $f(x) = x + 3$ et $g(x) = |x + 1|$

7) $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = 3|x + 1|$

8) $f(x) = |2 - x|$ et $g(x) = |3x + 1|$

29 *Trouver* gof *et* fog *si*

1) $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = 4x + 5$

2) $f(x) = ax + b$ et $g(x) = \alpha x + \beta$

30 *On donne* $f(x) = 2x + 1$ *et* $g(x) = ax + b$. *Trouver* a *et* b *si* $gof(x) = 6x - 3$.

31 *Trouver* h *et* k *et déterminer* Df, Dg, Dh, Dk *si* fog = h , gof = k

1) $f(x) = -3x - \frac{1}{2}$ et $g(x) = |x|$

2) $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = 2x - 7$

3) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ et $g(x) = 3x + 2$

4) $f(x) = \frac{1}{x - 1}$ et $g(x) = 2 + |x|$

32 *Trouver* h *et* k *et déterminer* Df, Dg, Dh, Dk *si* fog = h , gof = k

1) $f(x) = (x + 1)^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$

2) $f(x) = (2x - 1)^2$ et $g(x) = \frac{1}{x - 1}$

3) $f(x) = (2 - 3x)^2$ et $g(x) = (2x - 3)^2$

4) $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = (1 + 3x)^2$

5) $f(x) = (x + 2)^3$ et $g(x) = 2 - 4x$

6) $f(x) = (x + 2)(x - 1)$ et $g(x) = (x - 1)^3$

7) $f(x) = \frac{1}{(x - 2)^2}$ et $g(x) = \frac{1}{3x - 1}$

8) $f(x) = (x + 5)^2$ et $g(x) = |x - 1|$

33 *Que peut-on dire des applications composées de deux injections, de deux surjections, de deux bijections, d'une injection et d'une surjection, d'une injection et d'une bijection?*

34 *Si* f *est une bijection de* A *vers* B, *quelle est la bijection* $f^{-1}of$? *Et la bijection* fof^{-1} ?

THEOREME 3	La composition des applications est associative.

Exercices

35 *Montrer que si* f *est une application de* A *vers* B , *alors* $Id_B of = f$ *et* $foId_A = f$.

36 *Si* $\mathcal{B}$ *est l'ensemble des bijections d'un ensemble vers lui-même et si* o *désigne la composition des bijections, montrer que le couple* $(\mathcal{B}, o)$ *est une structure de groupe.*

37 *Dans* $\mathbb{R}^*$, $f(x) = 3x$ *et* $g(x) = \frac{5}{x}$. *Calculer* $g o f$, $(g o f)^{-1}$, f^{-1}, g^{-1}, $f^{-1} o g^{-1}$.

Si f *et* g *sont deux bijections, à quoi est égal* $(g o f)^{-1}$?

THEOREME 4 Si f est une application de A vers B et g une application de B vers A, leur composé est l'identité si et seulement si f et g sont deux bijections réciproques l'une de l'autre.

Exercices

38 *Les bijections suivantes sont-elles réciproques l'une de l'autre?*

1) $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = \frac{x - 3}{2}$ 2) $f(x) = \frac{x}{5} - 4$ et $g(x) = 5x + 20$

3) $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{5}{3}$ et $g(x) = 2x + \frac{10}{3}$ 4) $f(x) = \frac{2x}{3} + \frac{3}{4}$ et $g(x) = \frac{3x}{2} - \frac{9}{8}$

39 *La symétrie orthogonale d'axe* d, *la symétrie centrale, la projection parallèle d'une droite sur une autre sont-elles des bijections? Si oui, donner les bijections réciproques.*

Lorsqu'une bijection f *est telle que* $f = f^{-1}$, *on dit que* f *est une* ***involution.***

Quelles sont les bijections ci-dessus qui sont des involutions?